

8. $\int \sqrt[3]{x} \sqrt{2 + \sqrt[3]{x^2}} dx$.
 Ж: $\frac{2}{3} \left(\sqrt[4]{2 + \sqrt[3]{x^2}} \right)^9 - \frac{12}{5} \left(\sqrt[4]{2 + \sqrt[3]{x^2}} \right)^5 + C$.
9. $\int \frac{dx}{x^4 \sqrt{1+x^2}}$. Ж: $\frac{(2x^2-1) \sqrt{1+x^2}}{3x^3} + C$.
10. $\int \sqrt{x^2-4} dx$. Ж: $\frac{x}{2} \sqrt{x^2-4} - 2 \ln |x + \sqrt{x^2-4}| + C$.

6- мустақил иш

Аникмас интегралларни топинг.

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+3} (\sqrt[4]{x+3}-1)}$. Ж: $4 \sqrt[4]{x+3} + 4 \ln |\sqrt[4]{x+3}-1| + C$.
2. $\int \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt[3]{x}+1)\sqrt{x}} dx$.
 Ж: $\frac{3}{2} \sqrt[3]{x^2} - 3 \sqrt[3]{x} - 6 \sqrt[6]{x} + 3 \ln |\sqrt[3]{x}+1| + 6 \operatorname{arctg} \sqrt[6]{x} + C$.
3. $\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$. Ж: $\sqrt{x^2+x+1} - \frac{1}{2} \ln \left| x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2+x+1} \right| + C$.
4. $\int \frac{dx}{(x-1) \sqrt{6x-x^2-5}}$. Ж: $C - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5-x}{x-1}}$.
5. $\int \sqrt{1-2x-x^2} dx$. Ж: $\frac{x+1}{2} \sqrt{1-2x-x^2} + \arcsin \frac{x+1}{\sqrt{2}} + C$.
6. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(x^2+1)^5}}$. Ж: $C + \frac{x^3}{3 \sqrt{(1+x^2)^3}}$.
7. $\int \sqrt[3]{x} \sqrt[7]{1 + \sqrt[3]{x^4}} dx$. Ж: $\frac{21}{32} \sqrt[7]{(1 + \sqrt[3]{x^4})^8} + C$.

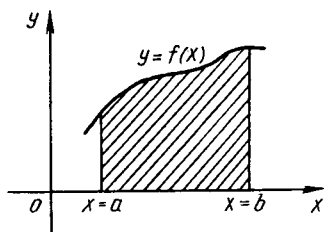
7-§. Аник интеграл. Ньютон — Лейбниц формуласи.

Аник интегралда ўзгарувчини алмаштириш.

Бўлаклаб интеграллаш

6.7.1. $f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада аникланган ва узлуксиз бўлсин. Бу кесмани $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ нукталар билан n та қисмга бўламиз. Ҳар бир (x_{i-1}, x_i) оралиқдан ихтиёрий ξ_i нуктани оламиз ва ушбу йиғиндини тузамиз:

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$



23- шакл

бунда $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Ушбу $\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x$

кўринишдаги йиғинди *интеграл йиғинди*, бу йиғиндининг $\max \Delta x_i \rightarrow 0$ даги лимитини, агар бу лимит мавжуд бўлса, $f(x)$ функциядан a дан b гача олинган *аниқ интеграл* дейилади ва

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

кўринишда белгиланади. Бу ҳолда $f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада *интегралланувчи функция* дейилади. a ва b сонлар мос равишда интеграллашнинг *қуйи* ва *юқори чегаралари* дейилади.

Функция $[a, b]$ кесмада интегралланувчи бўлиши учун унинг шу кесмада узлуксиз бўлиши етарли.

Агар $[a, b]$ кесмада $f(x) > 0$ бўлса, у ҳолда $\int_a^b f(x) dx$ интеграл

геометрик жихатдан $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$ ва $x = b$ чизиқлар билан чегараланган эгри чизикли трапеция кўринишидаги шаклнинг юзини ифодалайди (23- шакл).

6.7.2. Аниқ интегралнинг асосий хоссаларини келтираимиз.

- а) $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx;$
- б) $\int_a^a f(x) dx = 0;$
- в) $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx;$
- г) $\int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x)) dx = \int_a^b f_1(x) dx \pm \int_a^b f_2(x) dx.$
- д) $\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$, бунда k — ўзгармас;

е) агар $[a, b]$ кесмада $f(x) \geq 0$ бўлса, у ҳолда $\int_a^b f(x) dx \geq 0;$

ж) агар $[a, b]$ кесмада $f(x) \geq g(x)$ бўлса, у ҳолда $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx;$

э) агар m ва M мос равишда $f(x)$ функциянинг $[a, b]$ кесмадаги энг кичик ва энг катта киймати бўлса, у ҳолда

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

тенгсизлик ўринли (аник интегрални баҳолаш ҳақидаги теорема);

и) $\int_a^b f(x) dx = f'(c)(b-a)$, бунда $c \in (a, b)$ (ўрта киймат ҳақидаги теорема).

6.7.3. Агар $F(x)$ $[a, b]$ кесмада узлуксиз $f(x)$ функциянинг бошланғич функцияларидан бири бўлса, у ҳолда Ньютон — Лейбницнинг қуйидаги формуласи ўринли:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Бу формуладан аниқ интегралларни ҳисоблашда фойдаланилади.

1-мисол. Интегрални ҳисобланг: $\int_e^2 \frac{dx}{x \ln x}$.

Ечиш. $\int_e^2 \frac{dx}{x \ln x} = \int_e^2 \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \ln |\ln x| \Big|_e^2 = \ln(\ln 2) - \ln(\ln e) = \ln 2$.

2-мисол. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx$ ни ҳисобланг.

Ечиш. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \sin x dx = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 x) d(\cos x) =$
 $= -\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{3} \cos^3 x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\left(\cos \frac{\pi}{2} - \cos 0\right) + \frac{1}{3}(\cos^3 \frac{\pi}{2} - \cos^3 0) = \frac{2}{3}.$

6.7.4. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада узлуксиз, $x = \varphi(t)$ функция эса дифференциаланувчи бўлиб, шу билан бирга $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$ бўлса, у ҳолда ушбу тенглик ўринли:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

Кўпинча $x = \varphi(t)$ ўринга қўйиш ўрнига $t = \psi(x)$ тескари алмаштиришдан фойдаланилади. Бу ҳолда интеграллашнинг янги чегаралари α ва β бевосита $\alpha = \psi(a)$ ва $\beta = \psi(b)$ тенгликлардан топилади. Бунда интеграллаш чегараларини алмаштиришни қуйидаги жадвал шаклида ёзиш қулай:

x	t
a	α
b	β

3- мисол. $\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx$ интегрални ҳисобланг.

Ечиш. $x = \sin t$ ўрнига қўйишдан фойдаланамиз:

$$\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx = \left\{ \begin{array}{l} x = \sin t, \\ dx = \cos t dt, \end{array} \right. \begin{array}{|c|c|} \hline x & t \\ \hline \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\pi}{4} \\ \hline 1 & \frac{\pi}{2} \\ \hline \end{array} \Bigg\} =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1-\sin^2 t}}{\sin^2 t} \cos t dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t} dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t} dt =$$

$$= (-\operatorname{ctg} t - t) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \left(-\operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) - \left(-\operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

4- мисол. $\int_3^8 \frac{x dx}{\sqrt{x+1}}$ интегрални ҳисобланг.

Ечиш. $t = \sqrt{x+1}$ формула бўйича ўзгарувчини алмаштирамиз:

$$\int_3^8 \frac{x dx}{\sqrt{x+1}} = \left\{ \begin{array}{l} t = \sqrt{x+1}, \\ x = t^2 - 1, \end{array} \right. \begin{array}{|c|c|} \hline x & t \\ \hline 3 & 2 \\ \hline 8 & 3 \\ \hline \end{array} \Bigg\} =$$

$$= \int_2^3 \frac{(t^2-1)2tdt}{t} = 2 \int_2^3 (t^2-1) dt = 2 \left(\frac{t^3}{3} - t \right) \Big|_2^3 =$$

$$= 2(9-3) - 2\left(\frac{8}{3} - 2\right) = \frac{32}{3}.$$

6.7.5. Агар $u=u(x)$, $v=v(x)$ функциялар ва уларнинг ҳосил $[a, b]$ кесмада узлуксиз бўлса, у ҳолда

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

тенглик ўринли (бўлаклаб интеграллаш формуласи).

5- мисол. $\int_1^e x \ln^2 x dx$ интегрални топинг.

Ечиш. Бўлаклаб интеграллаш формуласини қўлаймиз:

$$\begin{aligned} \int_1^e x \ln^2 x dx &= \left\{ \begin{array}{l} u = \ln^2 x, \quad du = 2 \ln x \cdot \frac{dx}{x}, \\ dv = x dx, \quad v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right\} = \frac{1}{2} x^2 \ln^2 x \Big|_1^e - \int_1^e x \ln x dx = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} u = \ln x, \quad du = \frac{dx}{x}, \\ dv = x dx, \quad v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right\} = \frac{1}{2} e^2 - \left(\frac{x^2}{2} \ln x \Big|_1^e - \frac{1}{2} \int_1^e x dx \right) = \\ &= \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{2} e^2 + \frac{1}{2} \int_1^e x dx = \frac{x^2}{4} \Big|_1^e = \frac{1}{4} (e^2 - 1). \end{aligned}$$

7- дарсхона топшириғи

Интегралларни ҳисобланг:

1. $\int_0^1 (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2}) dx.$ Ж: $\frac{19}{15}.$
2. $\int_1^2 \frac{dx}{2x-1}.$ Ж: $\frac{1}{2} \ln 3.$
3. $\int_1^e \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)}.$ Ж: $\frac{\pi}{4}.$
4. $\int_{\frac{3}{4}}^2 \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}.$ Ж: $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$
5. $\int_1^6 \frac{dx}{1+\sqrt{3x-2}}.$ Ж: $\frac{2}{3} \left(3 + \ln \frac{2}{5} \right).$